

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

多变量微积分笔记7——非独立变量

1. 独立变量，即一个量改变不会引起除因变量以外的其他量的改变。只有将某物理量由独立变量来表达，由它给出的函数关系才是正确的。

2. 非独立变量，一个量改变会引起除因变量以外的其他量改变。把非独立变量看做是独立变量，是确定物理量间关系的一大忌。

正确确定物理表达式中的物理量是常量还是变量，是独立变量还是非独立变量，不但是正确解答有关问题的前提和保障，而且还可以简化解答过程。

在理想的气体状态方程中， $PV/T=C$ ，其中C为常数。可以将其看作一个约束关系 $g(P,V,T)=C$ ，当其中一个变量改变时，也必将引起其它两个变量的改变，P、V、T就是g的三个非独立变量。

非独立变量的变化

如果有一个包含三个非独立变量的函数 $g(x,y,z)=C$ ，理论上每一个变量都可以用另外两个变量表示，例如z用x,y表示： $z=z(x,y)$ ，这样就可以更加清晰的知道z与x,y的关系，即当x,y变化时是怎样影响z的。然而在大多数情况下，求解 $z(x,y)$ 都比较困难，这时应当怎样理解变量之间的关系呢？也就是在 $z=z(x,y)$ 中，z的变化率是多少？

有一个关系式 $g(x,y,z)=x^2+yz+z^3=8$ ，在点 $(x,y,z)=(2,3,1)$ 附近观察，如果稍微改动x和y，x和y对于z的变化有什么样的影响？

在这里，直接解出z的表达式会很困难，需要寻找一个更简单的方法。

先来看一下g的全微分（全微分可参考《多变量微积分4——全微分与链式法则》）：

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 2x dx + z dy + (y + 3z^2) dz = 0$$

由于 $g(x,y,z)=C=8$ ，所以 $dg=0$ ；或者说由于 $g(x,y,z)$ 是一个常数，g的变化率为0。在 $(x,y,z)=(2,3,1)$ 处：

$$dg|_{(2,3,1)} = 4dx + dy + 6dz = 0$$

这个式子告诉我们，在等值面上变化量之间的关系，其中两个变量改变时，第三个变量会怎样变化。如果把z看成x,y的函数 $z=z(x,y)$ ，z的变化：

$$4dx + dy + 6dz = 0$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{4dx + dy}{6} = -\frac{2dx}{3} - \frac{dy}{6}$$

z关于x的变化率就是x的偏导，此时y值不变， $dy=0$ ：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$dz = -\frac{2dx}{3} - \frac{dy}{6} = -\frac{2dx}{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{3}$$

z关于y的变化率就是y的偏导, 此时x值不变, $dx = 0$:

$$dz = -\frac{2dx}{3} - \frac{dy}{6} = -\frac{dy}{6}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{6}$$

一般地, 如果 $g(x,y,z) = C$, 那么:

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$$

这样任何变量的微分都可以由其它变量表示, 例如z的变化:

$$dz = -\frac{g_x}{g_z} dx - \frac{g_y}{g_z} dy$$

z关于x的偏导, y是定值, $dy = 0$, 此时:

$$dz = -\frac{g_x}{g_z} dx - \frac{g_y}{g_z} 0 = -\frac{g_x}{g_z} dx$$
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{g_x}{g_z}$$

这个结果就是当x改变时, x对于z的变化率, 即:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx} = -\frac{g_x}{g_z}$$

同理:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_y}{g_z}$$

通过这种方式, 可以表达非独立变量之间的变化。

相关变量的偏微分

有一个函数 $f(x,y) = x + y$, 现在x的偏导:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

如果令 $x = u, y = u + v$:

$$f = x + y = u + u + v = 2u + v$$
$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2$$

现在的结果有些令人迷惑了, 因为 $x = u$, 所以x和u等价, 但是得到的结果并不相同:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial u}$$

这点在《多变量微积分4——全微分与链式法则》中做过介绍，实际上：

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

这需要认真审视偏导，当计算 f_x 时，意味着保持 y 不变的同时改变 x ；而 f_u 意味着保持 v 不变的同时改变 u 。由于 $x = u$ ，所以改变 u 和改变 x 是一样的，但保持 v 不变和保持 y 不变并不相同。如果保持 y 不变，因为 $x = u$ ，所以改变 x 的同时也意味着改变了 u ，所以为了保持 y 不变， v 也势必发生改变，从而使 $y = u + v$ 不变。当保持 v 不变时， $v = y - u = y - x$ ，可以看出，保持 v 不变实际上是保持 $y - x$ 不变，这和保持 y 不变是两回事。这些偏导虽然看似简单，但使用起来其实是有风险的，因为让它们保持恒定并不是显而易见的。

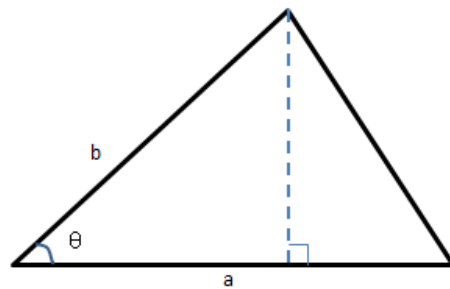
现在，我们用新的符号明确是指出谁是恒定不变的：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \text{ means keep } y \text{ constant}$$

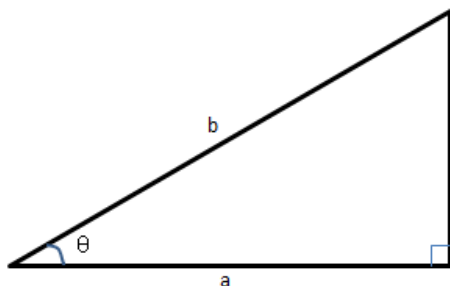
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \text{ means keep } v \text{ constant}$$

$$\text{so } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v$$

三角形的面积



三角形的两边分别是 a 和 b ， ab 的夹角是 θ ，面积 $A = (ab\sin\theta)/2$ ，可以将其看作是函数 $A(a, b, \theta)$ 。假定三个变量之间存在某种约束关系，比如三角形是直角三角形，那么 $a = b\cos\theta$ 就是变量之间的约束，现在我们想知道面积是怎样依赖于 θ 的？



面积关于 θ 的变化率当然是面积 A 关于 θ 的偏导，问题是 a, b, θ 不是相互独立的变量，直角三角形就是三者之间的约束，当 θ 改变时，为了维持直角， a 或 b 也会随之改变。下面将分情况加以说明。

1) a, b 保持不变

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_{a,b} = \frac{1}{2} ab \cos \theta$$

实际上这意味着放弃直角这一约束。如果保留直角，将有两个选择，保持 b 恒定或 a 恒定。

2) a 保持不变， θ 改变时，面积的变化率是：

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a$$

3) b 保持不变， θ 改变时，面积的变化率是：

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_b$$

现在需要进行一些计算，以第二种情况为例，看看面积的变化率具体是什么。

方法1) 利用最简单的代数法，这种方法仅对于简单的约束关系有效。

$$\begin{aligned} a &= b \cos \theta \Rightarrow b = \frac{a}{\cos \theta} \\ A &= \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{1}{2} a \left(\frac{a}{\cos \theta} \right) \sin \theta = \frac{1}{2} a^2 \tan \theta \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a &= \frac{1}{2} a^2 \sec^2 \theta \end{aligned}$$

方法2) 微分法

如果保持 a 不变，意味着 $da = 0$

$$\begin{aligned} a &= b \cos \theta \\ da &= \frac{\partial a}{\partial b} db + \frac{\partial a}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta db - b \sin \theta d\theta = 0 \\ \Rightarrow db &= \frac{b \sin \theta d\theta}{\cos \theta} = b \tan \theta d\theta \end{aligned}$$

这实际上是求出了 b 关于 θ 的变化率。

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\partial A}{\partial a} da + \frac{\partial A}{\partial b} db + \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} b \sin \theta da + \frac{1}{2} a \sin \theta db + \frac{1}{2} ab \cos \theta d\theta \\ &= 0 + \frac{1}{2} a \sin \theta (b \tan \theta d\theta) + \frac{1}{2} ab \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab (\sin \theta \tan \theta + \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab \sec \theta d\theta \\ \frac{dA}{d\theta} &= \frac{1}{2} ab \sec \theta \end{aligned}$$

这个结果就是当a保持不变时，A对于θ的变化率，即：

$$\frac{dA}{d\theta} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a = \frac{1}{2} ab \sec \theta$$

结果中含有b是因为改变θ的同时b也将发生改变，因此b也要被看作因变量。

综合示例

示例1

$$w = x^3 y - z^2 t, \quad xy = zt, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{x,y} = ?$$

示例中的约束条件是 $xy = zt$ ，可将其看作 $g(x,y,z,t) = xy - zt = 0$ ，在假定x,y不变的前提下计算w关于z的变化率。

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

$$x \text{ and } y \text{ is constant} \Rightarrow dx = 0, dy = 0$$

$$dw = 0 + 0 + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt = -2tzdz - z^2 dt$$

$$g(x, y, z, t) = 0 \Rightarrow dg = 0$$

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt \\ &= 0 + 0 - tdz - zdt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{tdz}{z}$$

$$\Rightarrow dw = -2tzdz - z^2 dt = -2tzdz - z^2 \left(-\frac{tdz}{z}\right) = -tzdz$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y} = \frac{dw}{dz} = -tz = -xy$$

示例2

在 $P = (1, -1, 1)$ 处, $z = x^2 + y + 1$, $f(x, y, z)$ 可微, $\nabla f = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$,

$g(x, z) = f(x, y(x, z), z)$, 在 $(x, z) = (1, 1)$ 处, $\nabla g(x, z) = ?$

$$\because \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -3$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 2dx + dy - 3dz$$

$$z = x^2 + y + 1$$

$$\Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xdx + dy$$

$$\text{at } P(1, -1, 1), \quad dz = 2xdx + dy = 2dx + dy \Rightarrow dy = dz - 2dx$$

$$df = 2dx + dy - 3dz = 2dx + (dz - 2dx) - 3dz = -2dz$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

$$\because g(x, z) = f(x, y(x, z), z)$$

$$\therefore dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial z} dz = df = -2dz$$

$\Rightarrow g$ 的变化率仅和 z 有关

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow dg = \frac{\partial g}{\partial z} dz = -2dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = -2$$

$$\nabla g(x, z) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial z} \right\rangle = \langle 0, -2 \rangle$$

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!



微信扫一扫
关注该公众号

随笔

分类: 多变量微积分

标签: 非独立变量

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: 多变量微积分笔记6——拉格朗日乘法

» 下一篇: 多变量微积分笔记8——二重积分

posted on 2018-03-01 14:31 我是8位的 阅读(2004) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日~3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes